INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

VICTOR VIEIRA GONÇALVES

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES COM DERIVADAS PARCIAIS E SUAS APLICAÇÕES

Licenciatura em Ensino de Matemática

I.S.E, Julho de 2008

Victor Vieira Gonçalves

Introdução às Equações com Derivadas Parciais e suas Aplicações

Trabalho Cientifico apresentado ao I.S.E para obtenção do grau de Licenciatura em Ensino de Matemática, sob a orientação do Professor Doutor Paulino Lima Fortes.

I.S.E – Julho 2008

INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Trabalho de fim de curso:

Introdução às Equações com Derivadas Parciais e suas Aplicações

O Júri

____

____

____

Praia, aos __________ de ____________________ de 2008

Agradecimento

Quero expressar a minha gratidão a todos que, directa ou indirectamente contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

Em primeiro lugar a Deus, por iluminar meus caminhos e por ter-me dado forças para superar os momentos difíceis permitindo que eu concluísse este trabalho.

Ao Professor Doutor Paulino Lima Fortes, por sua orientação, paciência, dedicação e compreensão que permearam todos os momentos da construção deste trabalho.

Agradeço a todos os meus familiares, amigos e colegas pelo encorajamento que me proporcionaram, em especial para Sandro Emanuel Alves, Silvino dos Reis Borges, Carlos Alberto Martins, António Carlos Tavares, Elizandro Leny, Agostinho Semedo, António Barradas e Nelson Amador.

A todos os meus sinceros agradecimentos.

Dedicatória

Aos meus familiares como prova do meu reconhecimento pelo esforço e dedicação que me prestaram ao longo destes anos de vida, em especial para o meu irmão José António Vieira Gonçalves, que neste momento se encontra na Cadeia Central da Praia.

Índice

CAPÍTULO 1

Introdução

Este trabalho foi elaborado no âmbito da apresentação dum trabalho de fim do curso para a obtenção do grau de Licenciatura em Ensino de Matemática. Sendo do tipo estudo aprofundado, pretende-se com o mesmo desenvolver uma investigação cíentifica, de base sobretudo bibliográfica, sobre as equações com derivadas parciais (EDP) e sua aplicação na resolução de problemas que envolvam processos vibratórios, de difusão e outros, para os quais se adaptamos as equações da Difusão, Laplace e Ondas.

Apesar de ser assaz clássica, sabemos que o estudo das equações com derivadas parciais é uma das áreas com mais intensa investigação na análise, tanto no contexto da Matemática Pura, como Matemática Aplicada ou suas aplicações, dada a grande aplicabilidade dessas equações na resolução de problemas da vida real, bem como nas outras ciências como Física, Engenharia, Finanças, Electrónica, entre outras áreas de estudos.

Com base nessas considerações, o suporte motivacional que justifica a escolha do tema, baseia-se em três aspectos fundamentais a saber:

(i) A necessidade pessoal, em aprofundar o conhecimento adquirido durante a fase curricular, procurando assim aprofundar as bases para a melhoria da minha pratica profissional;

(ii) A grande aplicabilidade destas equações na resolução dos problemas da vida real;

(iii) A relevância que tem para a função de um professor de Matemática, pois dota o professor de conhecimentos aprofundados de Análise matemática, Geometria e Matemática aplicada em geral.

Assim pretendemos alcançar os seguintes objectivos:

(i) Iniciar ao estudo das equações com derivadas parciais;

(ii) Elaborar um instrumento de referência para o conhecimento das equações com derivadas parciais e suas aplicações;

(iii) Efectuar um treinamento em matemática aplicada, como instrumento de modelação e de ensino.

* * *

O presente trabalho com a excepção da Introdução, Breve historial, Conclusão, Bibliografia e Anexo, encontra-se estruturado em dois capítulos:

No primeiro capítulo, intitulado **Equações com derivadas parciais**, fez-se uma breve introdução, para de seguida apresentar a notação, a definição e classificação das mesmas, analisando alguns problemas que originam as EDP e os métodos de resolução das EDP.

No segundo capítulo fez-se **algumas aplicações** das EDP, nomeadamente as equações notáveis, para depois apresentar os exercícios resolvidos.

CAPÍTULO 2

Breve historial das EDP

As equações com derivadas parciais nasceram no século XVIII, em quase todos os ramos da Física e Engenharia, quer directamente, como tradução matemática de determinados fenómenos ou categoria de fenómenos, quer indirectamente, na resolução matemática de certos fenómenos. A sua formalização deve-se aos trabalhos de d´Alembert, Euler, Daniel Bernoulli, Laplace, Legendre, em especial para resolver problemas da Física, nomeadamente sobre cordas vibrantes, hidrodinamica, elasticidade, teoria do potencial (atracção gravitacional), etc.

De início prestou-se mais atenção às equações de segunda ordem porque elas traduziam os fenómenos físicos que mais interessavam os cientistas nessa altura. Quanto as equações de primeira ordem, pouco trabalho sistemático foi feito antes de Lagrange, foi ele quem introduziu a terminologia hoje usada, enquanto que a Gaspard Monge se deve a linguagem geométrica.

No século XIX as equações com derivadas parciais continuaram a interessar numerosos matemáticos como Fourier, Cauchy, Poisson, etc, e tornou-se numa das áreas essênciais da matemática pelos avanços que acabaram por induzir noutros domínios, como por exemplo a teoria das funções, o cálculo das variações, os desenvolvimentos em série, as equações diferenciais ordinárias (EDO), a Álgebra e a Geometria diferencial.

Foi nesse século que começou a ser introduzido o rigor na análise e Cauchy vem a preocupar-se com teoremas de existência e unicidade de soluções das EDO e das EDP. Sonya Kowaleswsky, discípula de Weierstrass, ocupou-se igualmente do assunto, apesar das suas limitações, esses estudos mantiveram-se durante anos sem grandes alterações.

Em 1957, o matemático Hans Lewy, apresentou um exemplo de uma

EDP com coeficientes infinitamente deriváveis mas sem solução. Isso levou à criação de soluções generalizadas, ao recurso a métodos da análise funcional, à teoria das distribuições, etc., com investigações profundas sobre existência de soluções, sua unicidade e regularidade.

Actualmente, as equações com derivadas parciais é uma das áreas com mais intensa investigação na análise, tanto no contexto da Matemática Pura, como Matemática Aplicada ou suas aplicações, dada a grande aplicabilidade dessas equações na resolução de problemas da vida real, bem como nas outras ciências como Física, Engenharia, Finanças, Electrónica, entre outras áreas de estudos.

CAPÍTULO 3

Equações com Derivadas Parciais

3.1 Introdução

Ao contrário das equações diferenciais ordinárias (EDO), as equações com derivadas parciais não têm uma teoria unificadora. A razão disso é a complexidade da geometria dos espaços de evolução das mesmas: se para as EDO se trata de variedades diferenciáveis, para as EDP trata-se de subespaços de dimensão superior a 1 do fibrado tangentes a uma variedade, onde nem sempre os campos de vectores são completamente integráveis. Assim, algumas equações têm a sua própria teoria, enquanto que outras ainda são alvo de intensa investigação para que sejam melhor compreendidas.

3.2 Notação

Existem muitas e diferentes maneiras de expressar as EDP, não sendo raro a mesma notação ter significados diferentes para autores diferentes. Nós usaremos neste texto indistintamente as notações mais correntes: se $u = u(x, y)$, teremos para as derivadas parciais de primeira ordem

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= u'_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= u'_y.\end{aligned}$$

De forma idêntica, tem-se para as segundas ordens:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx}$$

3.3 Definição e classifição

3.3.1 Definições relativas às EDP

Definição 3.1 (Equação com derivadas parciais) *Uma equação com derivadas parciais é uma igualdade do tipo*

$$\mathbf{F}\left(x, y, ..., u, ..., \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, ...\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

entre variáveis independentes uma ou mais funções desconhecidas dessas variáveis e derivadas parciais das funções em relação a essas variáveis.

Exemplo 3.1 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y..$

Exemplo 3.2 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3\cos(2x + y).$

Definição 3.2 (Ordem de uma EDP) *A **ordem de uma EDP** é a maior das ordens das derivadas que nela figuram.*

Exemplo 3.3 $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, *é uma equação com derivadas parciais de primeira ordem , onde u é variável dependente, x e t são variáveis independentes.*

Exemplo 3.4 $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y^3 \frac{\partial u}{\partial x}$, *é uma equação com derivadas parciais de segunda ordem, onde u é variável dependente, x e y são variáveis independentes.*

Definição 3.3 (Solução de uma EDP) *Chama-se **solução** de uma EDP a uma função que verifica identicamente essa equação.*

Exemplo 3.5 *Dada a equação*

$$-3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial y} = -8\cos\left(2x + 3y\right),$$

Verifique se a função $u(x,y)$ definida por $4\sin(2x+3y)$ é solução da dada equação

Resolução

Derivando em relação a x, vem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 8\cos(2x+3y),$$

e em relação a y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 12\cos(2x+3y)$$

levando na equação, temos

$$\begin{aligned} -24\cos(2x+3y) + 16\cos(2x+3y) &= -8\cos(2x+3y) \\ &\Longleftrightarrow -8\cos(2x+3y) = -8\cos(2x+3y) \end{aligned}$$

logo $u(x,y) = 4\sin(2x+3y)$ é solução da equação dada.$\square$

Definição 3.4 (Solução geral) *A **solução geral** é uma solução que contém funções arbitrárias, em número igual à ordem da equação.*

Exemplo 3.6 *Mostre que a função* $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + F(x) + G(y)$ *é solução geral da equação* $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$.

Resolução

Derivando u em relação a y e em relação a x, vem que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y.$$

Levando na equação vem que

$$2x - y = 2x - y.$$

Logo u é solução geral da equação.$\square$

Definição 3.5 (Solução particular) *Uma **solução particular** é uma solução que pode ser obtida da solução geral mediante escolha particular das funções arbitrárias.*

Exemplo 3.7 *Do exemplo 3.6, fazendo* $F(x) = 2senx$; $G(y) = 3y^2 - 5$, *mostre que* $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + F(x) + G(y)$ *é solução particular da equação diferencial parcial dada.*

Resolução
Fazendo
$$F(x) = 2senx; \quad G(x) = 3y^2 - 5,$$
vem que:
$$u(x, y) = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + 2\sin x + 3y^4 - 5$$
Derivando em relação a y e em ralação e x vem que
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - xy + 12y^3, \ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 2x - y,$$
como a igualdade é válida, logo u é solução particular da equação dada.□

Definição 3.6 (Solução singular) *Uma* ***solução singular*** *é uma solução que não pode ser obtida da solução geral mediante escolha particular das funções arbitrárias.*

Exemplo 3.8 *Se* $u = x\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, *onde* u *é uma função de* x *e* y, *vamos, por substituição directa, que tanto* $u = xF(y) - [F(y)]^2$ *como* $u = \frac{x^2}{4}$ *são soluções. A primeira é solução geral, envolvendo uma função arbitrária* $F(y)$. *A segunda, que não se pode obter da solução geral por nenhuma escolha de* $F(y)$, *é a solução singular.*

Definição 3.7 (Problema de valores no contorno) *Um problema de valores no contorno envolvendo uma equação com derivadas parciais busca todos as soluções da equação que satisfaçam a determinadas condições.*

3.3.2 Classificação das EDP

As equações com derivadas parciais de primeira ordem **quase linear** tem a forma:
$$a(x, y, u)\, U_x' + b(x, y, u)\, U_y' = c(x, y, u) \qquad \left(a^2 + b^2 \neq 0\right),$$
onde u é a função desconhecida.

Exemplo 3.9 $2xy\frac{\partial u}{\partial x} - 3\cos x\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 \sin 2y$

As equações com derivadas parciais **geral** de primeira ordem com duas variáveis independentes tem a forma:

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \text{ onde } \quad p = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ e } q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Exemplo 3.10 $4x^3\frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2y\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$

As equações com derivadas parciais nas variáveis independentes x e y e na variável dependente u é dita **quase linear** de segunda ordem, se pode ser posta na forma:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(x, y, u, u_x, u_y), \quad \left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right)$$

Exemplo 3.11 $2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos(x + y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin 2xy$

A equação **linear geral de segunda ordem** em duas variáveis independentes tem a forma

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \qquad (1)$$

onde $A, B, ..., G$ podem depender de x e de y, mas não de u, e os coeficientes $A,\ B,\ C$ não todos nulos.

Exemplo 3.12 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} + 4u = 2x - 3y$, *onde*

$$A = 1,\ B = 3,\ C = 4,\ D = 5,\ E = -2,\ F = 4 \quad e \quad G = 2x - 3y.$$

Uma equação de segunda ordem com variáveis independentes x e y que não tenha a forma (1) é chamada **não linear.**

Exemplo 3.13 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Exemplo 3.14 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = u^2$

Se $G(x, y) = 0$, a equação é chamada **homogénea**, enquanto se $G(x, y) \neq 0$, a equação é chamada **não homogénea.**

Exemplo 3.15 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 3y^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, *trata-se de uma equação homogénea.*

Exemplo 3.16 $2x^2y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\cos(x)\frac{\partial u}{\partial z} = e^{2x-y}$, *trata-se de uma equação não homogénea.*

Conforme a natureza das soluções de (1), a equação costuma classificar-se como **elíptica, hiperbólica** ou **parabólica** conforme o sinal do discriminante: $B^2 - 4AC$.

Parabólica - Se $B^2 - 4AC = 0$

Exemplo 3.17 $\frac{\partial u}{\partial y} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$A = 3,\ B = 0,\ C = 0,\ B^2 - 4AC = 0$$

Hiperbólica - Se $B^2 - 4AC > 0$

Exemplo 3.18 $-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5u = sen\,(e^x + 4)$

$$A = 2,\ B = 0,\ C = -1,\quad B^2 - 4AC = 8 > 0$$

Elíptica - Se $B^2 - 4AC < 0$

Exemplo 3.19 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} - 4u = e^{\ln(2x+y)}$

$$A = 1,\ B = 3,\ C = 4,\quad B^2 - 4AC = -7 < 0$$

3.3.3 Exercícios resolvidos

(Definição e classificação)[1]

Exercício 3.1 *Verifique se* $u(x,y) = 4e^{-3x}\cos 3y$ *é solução da equação*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

[1]Spiegel, **Análise de Fourier**, ed.1976, pág. 15-25

Resolução
Derivando em ordem a x, vem que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -12e^{-3x}\cos 3y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 36e^{-3x}\cos 3y$$

e. em ordem a y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -12e^{-3x}\sin 3y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -36e^{-3x}\cos 3y$$

levando na equação, vem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 36e^{-3x}\cos 3y - 36e^{-3x}\cos 3y = 0$$

logo $u\,(x, y)$ é solução da equação.□

Exercício 3.2 *Mostre que:* $u\,(x, t) = e^{-8t}\sin 2x$ *é solução do problema de valores no contorno*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u\,(0, t) = u\,(\pi, t) = 0, \\ u\,(x, 0) = \sin 2x. \end{cases}$$

Resolução
Com efeito, de

$$u\,(x, t) = e^{-8t}\sin 2x,$$

temos

$$\begin{aligned} u\,(0, t) &= e^{-8t}\sin 0 = 0, \\ u\,(\pi, t) &= e^{-8t}\sin 2\pi = 0, \\ u\,(x, 0) &= e^{-0}\sin 2x = \sin 2x \end{aligned}$$

e as condições de contorno são satisfeitas. Derivando em relação a t e depois em ralação a x temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -8e^{-8t}\sin 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{-8t}\cos 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4e^{-8t}\sin 2x$$

Levando na equação, temos

$$-8e^{-8t}\sin 2x = 2\left(-4e^{-8t}\sin 2x\right),$$

que é uma identidade, logo concluimos que $u(x,t) = e^{-8t}\sin 2x$ é solução do problema dado.□

Exercício 3.3 *Mostre que* $u(x,y) = \frac{1}{6}x^3y^2 + H(y) + G(x)$ *é solução geral da equação*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y.$$

Resolução

Derivando em relação a y e depois em relação a x, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3}x^3 y + H'(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$$

levando na equação diferencial temos

$$x^2 y = x^2 y,$$

que é uma identidade.

Logo $u(x,y)$ é solução geral da equação dada.□

Exercício 3.4 *Do exercício 3.3 verifique se* $u(x,y)$ *é solução particular da equação, mediante substituição* $H(y) = \cos y - \frac{1}{6}y^2$ *e* $G(x) = x^2 - 1$.

Solução

Fazendo a substituição, vem que

$$u(x,y) = \frac{1}{6}x^3y^2 + \cos y - \frac{1}{6}y^2 + x^2 - 1$$

Derivando em relação a y e depois em relação a x, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3}x^3 y - \sin y - \frac{1}{3}y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$$

levando na equação diferencial temos

$$x^2 y = x^2 y,$$

que é uma identidade.

Logo $u(x,y)$ é solução particular da equação dada.□

Exercício 3.5 *Determine se cada uma das seguintes equações com derivadas parciais é linear ou não linear, homogénea ou não homogénea, indicando, se para cada uma, a ordem, as variáveis dependentes e independentes:*

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

linear, homogénea, ordem 2, variável dependente u, variável x, y.

b) $\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{z^2}$

não linear, não homogénea, ordem 1, variável dependente z, variável independente r, s.

c) $(x^2 + y^2)\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

linear, homogénea, ordem 4, variável dependente u, variável independente x, y, z.

d) $w\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = rst$

não linear, não homogénea, ordem 2, variável dependente w, variável independente r, s, t.

Exercício 3.6 *Classifique cada uma das seguintes equações como elíptica, hiperbólica ou parabólica:*

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$A = 1,\ B = 0,\ C = -1,\quad B^2 - 4AC = 4 > 0,$$

e a equação é hiperbólica.

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + 3y$

$$A = 1,\ B = -2,\ C = 2,\quad B^2 - 4AC = -4 > 0,$$

e a equação é elíptica.

c) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$A = x^2,\ B = 2xy,\ C = y^2,\quad B^2 - 4AC = 0,$$

e a equação é parabólica.

d) $(M^2 - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ M > 0$

$$A = M^2 - 1,\ B = 0,\ C = -1,\quad B^2 - 4AC = 4M^2 - 4,$$

e a equação é hiperbólica se $M > 1$, elíptica se $M < 1$ e parabólica se $M = 1$.

3.4 Alguns problemas que originam as EDP

3.4.1 Indrodução

As equações com derivadas parciais originam-se como resultados da eliminação de constantes arbitrárias ou pela eliminação de funções arbitrárias das variáveis. E ainda podem originam em conexão com problemas relacianados com a Geometria.

3.4.2 Eliminação das constantes arbitrárias

Este método consiste na eliminação das constantes arbitrárias, derivando parcialmente as variáveis independentes.

Consideremos z como função de duas variáveis independentes x e y definida por:

$$g\,(x, y, z, a, b) = 0 \quad (1)$$

onde a e b são duas constantes arbitrárias.

Derivando (1) parcialmente em relação a x e y, temos

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + p\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = q\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Em geral, as constantes arbitrárias podem ser eliminadas de (1), (2), (3), dando uma equação com derivadas parciais de primeira ordem

$$g\,(x, y, z, p, q) = 0.$$

Exemplo 3.20 *Eliminar as constantes arbitrárias a e b de $z = ax^2 + by^2 + ab$.*

Resolução

Derivando parcialmente em relação a x e y,temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = 2ax$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = 2by$$

Tirando a e b destas equações e substituindo na relação dada, temos :

$$z = \left(\frac{1}{2}\frac{p}{x}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{q}{x}\right)y^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{p}{x}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{q}{x}\right)$$

ou

$$pq + 2px^2y + 2qxy^2 = 4xyz. \ \square$$

que é uma equação com derivadas parciais de primeira ordem.

Exemplo 3.21 *Eliminar a e b de $z = (x^2 + a)(y^2 + b)$*

Resolução
Derivando parcialmente em relação a x e y, temos que

$$p = 2x\left(y^2 + b\right) \text{ e } q = 2y\left(x^2 + a\right)$$

então:

$$y^2 + b = \frac{p}{2x} \text{ e } x^2 + a = \frac{q}{2y} \text{ e } z = \left(x^2 + a\right)\left(y^2 + b\right) = \left(\frac{q}{2y}\right)\left(\frac{p}{2x}\right)$$

ou

$$pq = 4xyz.$$

Poderíamos também eliminar a e b como se segue

$$pq = 4xy\left(x^2 + a\right)\left(y^2 + b\right) = 4xyz \ \square$$

3.4.3 Eliminação das funções arbitrárias

Este processo consiste na eliminação das funções arbitrárias, derivando parcialmente as variáveis independentes. Sejam $u = u(x, y, z)$ e $v = v(x, y, z)$ funções independentes das variáveis x, y, z, e seja

$$\phi(u, v) = 0 \quad (1)$$

e uma relação arbitrária entre elas.

Considerando z como variável dependente e derivando parcialmente em relação a x e y, temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \quad (2)$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial \phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \qquad (3)$$

eliminando $\frac{\partial \phi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ de (2) e (3), temos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)- \\
-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+ \\
+p\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Fazendo:

$$\begin{aligned}
\lambda P &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}, \\
\lambda Q &= \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}, \\
\lambda R &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},
\end{aligned}$$

temos a forma $Pp+Qq=R$, EDP em que p e q é livre da função arbitrária $\phi(u,v)$.

Exemplo 3.22 *Determinar a EDP resultante de*

$$\phi\left(\frac{z}{x^3},\frac{y}{x}\right)=0,$$

onde ϕ é uma função arbitrária dos argumentos.

Resolução

Escrevemos a relação funcianal na forma $\phi(u,v)=0$, com $u=\frac{z}{x^3}$ e $v=\frac{y}{x}$. Derivando parcialmente em relação a x e y, temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}\left(\frac{p}{x^3}-\frac{3z}{x^4}\right)+\frac{\partial \phi}{\partial v}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=0,\ \frac{\partial \phi}{\partial u}\left(\frac{q}{x^3}\right)+\frac{\partial \phi}{\partial v}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

A eliminação de $\frac{\partial \phi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ dá:

$$\begin{vmatrix} \frac{p}{x^3} - \frac{3z}{x^4} & -\frac{y}{x^2} \\ \frac{q}{x^3} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{p}{x^4} - \frac{3z}{x^5} + \frac{qy}{x^5}$$

ou

$$px + qy = 3z.$$

Exemplo 3.23 *Determinar a EDP de*

$$\varphi\left(x + y + z,\ x^2 + y^2 - z^2\right) = 0,$$

onde φ é uma função arbitrária dos argumentos.

Resolução
Sejam: $u = x + y + z,\ v = x^2 + y^2 - z^2$, de modo que a relação dada seja: $\varphi(u, v) = 0$.
Derivando em relação a x e y, temos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(1 + p) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(2x - 2zp) = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(1 + q) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(2y - 2zq) = 0$$

A eliminação de $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ dá:

$$\begin{vmatrix} 1 + p & 2x - 2zp \\ 1 + q & 2y - 2zq \end{vmatrix} = 2(y - x) + 2p(y + z) - 2q(z + x) = 0$$

ou

$$(y + z)p - (x + z)q = x - y.$$

3.4.4 Problemas geométricos

Equações com derivadas parciais geradas por familias de superfície
Vamos ver alguns exemplos, como podem surgir equações com derivadas parciais por eliminação das constantes arbitrárias ou das funções arbitrárias que aparecem em relações definindo família de funções.

Exemplo 3.24 *Consideremos a* ***equação da familia das esferas*** *de centro em Ox,*

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

com a e r constantes arbitrárias. Derivando ambos os membros em ordem a y e a z, e considerando x como função dessas variáveis, obtém-se

$$\begin{cases} (x-a)\frac{\partial x}{\partial y} + y = 0 \\ (x-a)\frac{\partial x}{\partial z} + z = 0 \end{cases}$$

onde já foi eliminado a constante r e que por eliminação de a, leva a

$$z\frac{\partial x}{\partial y} - y\frac{\partial x}{\partial z} = 0.$$

Esta equação é uma equação com derivada parcial de primeira ordem que tem como solução as funções $x = f(y, z)$, dadas pela família das esferas. □

Exemplo 3.25 *Consideremos a* ***equação geral das superfícies de revolução*** *em torno de Oz,*

$$z = f\left(x^2 + y^2\right)$$

com f função arbitrária.

Por derivação em ordem a x e y, vem

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'\left(x^2 + y^2\right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'\left(x^2 + y^2\right) \end{cases}.$$

Por eliminação das funções arbitrárias, conduz a equação

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Que é uma EDP de primeira ordem e que tem como a solução as funções $z = f(x, y)$, dadas pela equação das superfícies de revolução. □

Exemplo 3.26 *Consideremos a* ***família das superfícies conicas de revolução*** *em torno de Oz, que tem por equação:*

$$x^2 + y^2 = (z-c)^2\, tg^2\alpha,$$

com c e α constantes arbitrárias.

Por derivação em ordem a x e y, obtém-se:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{\partial z}{\partial x}\left(z-c\right)tg^2\alpha \\ y=\frac{\partial z}{\partial y}\left(z-c\right)tg^2\alpha \end{array}\right. .$$

A eliminação das constantes c e α(basta dividir membro a membro) conduz à equação

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Esta equação é uma EDP de primeira ordem que tem como solução as funções $z=f\left(x,y\right)$, dadas pela família da superfície conica de revolução.

Exemplo 3.27 *Consideremos agora* ***a família de superfície esféricas****,*

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=r^2,$$

sendo a,b,c e $r$constantes arbitrárias. Derivando em ambos os membros em ordem a y e a z, e considerando x como função dessas variáveis, obtém-se

$$\left\{\begin{array}{l} \left(x-a\right)\frac{\partial x}{\partial y}+\left(y-b\right)=0 \\ \left(x-a\right)\frac{\partial x}{\partial z}+\left(z-c\right)=0 \end{array}\right.$$

onde já foi eliminada a constante r. Neste caso não conseguimos eliminar imediatamente as restantes constantes, nem mesmo juntando a equação inicial.

A equação não pode ser de primeira ordem. Nesse caso teremos de efectuar outras derivadas. Obtemos então:

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(x-a\right)\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+1=0 \\ \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial y}+\left(x-a\right)\frac{\partial^2 x}{\partial z\partial y}=0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(x-a\right)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}+1=0 \end{array}\right.$$

que por eliminação de a leva a

$$\frac{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}=\frac{\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial^2 x}{\partial z\partial y}}=\frac{1+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}{\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}.$$

Esta equação é uma EDP de segunda ordem que tem como solução as funções $x=f\left(y,z\right)$, dadas pela família das superfícies esféricas.□

3.5 Métodos de resolução das EDP

3.5.1 Método de integração directa

Este método só é aplicável se a EDP apresentar apenas uma derivada parcial, integrando facilmente a equação.

Exemplo 3.28 *Consideremos a seguinte EDP*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y$$

A derivada parcial surge na equação, designa a derivada de u em ordem a x com y constante. Podemos então imediatamente integrar ambos os lados da equação em ordem a x mantendo y constante:

$$u = \int y dx + f(y) = yx + f(y) \quad .$$

Obtevemos assim uma " solução geral" que tem a forma

$$u = yx + f(y) . \quad \square$$

Exemplo 3.29 *Consideremos agora a EDP*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2$$

Tratando-se de uma derivada cruzada, teremos que integrar duas vezes a equação, primeiro sobre y (com x constante) e depois sobre x(com y constante):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \int \left(x^2 + y^2\right) dy + f(x) = x^2 y + \frac{y^3}{3} + f(x) \\ u &= \int \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + f(x)\right) dy = \frac{x^3 y}{3} + \frac{y^2 x}{3} + h(x) + g(y) . \end{aligned}$$

em que $h(x) = \int f(x)\, dx$. Assim, a solução obtida é:

$$u = \frac{x^3 y}{3} + \frac{y^2 x}{3} + h(x) + g(y) . \quad \square$$

3.5.2 Método de separação de variáveis

Este método assume-se que a solução da equação com derivadas parciais se pode expressar como produto de funções desconhecidas, em que cada função depende apenas de uma variável independente. Pois permite nos escrever a equação resultante de tal forma em que um membro depende apenas de uma variável e o outro das restantes, pelo que ambos os membros, sendo iguais, têm de ser iguais a uma constante[2], o que vai permitir determinar as soluções.

Vejamos um teorema muito importânte que permite determinar as soluções das EDP.

Teorema 3.1 (Princípio de superposição) *Se* $u_1, u_2, ..., u_n$ *são soluções de uma equação com derivadas parciais linear homogénea, então* $c_1u_1+c_2u_2+ ... + c_nu_n$*, onde* $c_1, c_2, ..., c_n$*, são constantes, também é solução.*

Exemplo 3.30 *Resolve o seguinte problema de valores no contorno*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\frac{\partial u}{\partial y}, \; u(0, y) = 8e^{-3y} + 4e^{-4y}$$

Resolução

Façamos $u = XY$ na equação dada, com X dependendo unicamente de x e Y dependendo unicamente de y.

Então

$$X'Y = 4XY' \quad \text{ou} \quad \frac{X'}{4X} = \frac{Y'}{Y}$$

onde

$$X' = \frac{dX}{dx} \quad \text{e} \quad Y' = \frac{dY}{dy}$$

como X depende somente de x e Y depende somente de y e x e y são variáveis independentes, cada membro deve ser igual a uma constantes, digamos k.

Então

$$X' - 4kx = 0 \quad \text{e} \quad Y' - ky = 0,$$

cujas soluções são

$$X = Ae^{4kx}, \quad Y = Be^{ky3}$$

[2]Por repectição sucessiva deste argumento no membro que eventualmente depende de mais de uma variável, eventualmente consegue-se obter uma separação completa.

[3]Ver Tabela1 em Anexo

Uma solução é, pois dada por:

$$u\left(x,y\right)=XY=ABe^{k(4x+y)}=Ce^{k(4x+y)}.$$

Então $C_1e^{k_1(4x+y)}$ e $C_2e^{k_2(4x+y)}$ são soluções, e pelo princípio de superposição, sua soma também o é, isto é, uma solução é

$$u\left(x,y\right)=C_1e^{k_1(4x+y)}+C_2e^{k_2(4x+y)}$$

Pelas condições de contorno,

$$u\left(0,y\right)=C_1^{k_1y}+C_2e^{k_2y}=8e^{-3y}+4e^{-5y}$$

o que é possivel sse

$$C_1=8,C_2=-4,k_1=-3 \text{ e } k_2=-5$$

Então

$$u\left(x,y\right)=8e^{-12x-3y}+4e^{-20x-5y}.$$

é a solução procurada.□

Exemplo 3.31 *Resolva a equação*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\ 0<x<3,\ t>0,$$

com

$$u\left(0,t\right)=u\left(3,t\right)=0,\ u\left(x,0\right)=5\sin 4\pi x-3\sin 8\pi,\left|u\left(x,t\right)\right|<M.$$

Resolução
Seja $u=XT$, onde X depende somente de x, e T somente de t .
Substituindo na equação, vem que:

$$XT^{'}=2X^{''}T\Leftrightarrow\frac{T^{'}}{2T}=\frac{X^{''}}{X},$$

por separação de variáveis. Cada membro deve ser igual a uma constante, que designaremos por $-\lambda^2$(se tomassemos $+\lambda^2$, a solução resultante não satisfaria à condição de u ser limitada para valores reais de λ)

Então

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \text{ e } T' + 2\lambda^2 T = 0$$

com soluções

$$X = A_1 \cos \lambda x + B_1 \sin \lambda x, \quad T = c_1 e^{2\lambda^2 t}.$$

Uma solução da equação é:

$$u(x,t) = XT = c_1 e^{-2\lambda^2 t} (A_1 \cos \lambda x + B_1 \sin \lambda x) = e^{-2\lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x),$$

onde $A = c_1 A_1$ e $B = c_1 B_1$.

Como $u(0,t) = 0$, vem que $e^{-2\lambda^2 t} A = 0 \Rightarrow A = 0$, então

$$u(x,t) = Be^{-2\lambda^2 t} \sin \lambda x$$

Como $u(3,t) = 0$, vem que $Be^{-2\lambda^2 t} \sin 3\lambda = 0$. Se $B = 0$, a solução é identicamente nulo, de modo que devemos ter

$$\sin 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 3\lambda = m\pi \text{ ou } \lambda = \frac{m\pi}{3}, m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Assim, uma solução é

$$u(x,t) = Be^{\frac{-2m^2\pi^2 t}{9}} \sin \frac{m\pi}{3} x$$

Outrossim, pelo processo de superposição, vem que

$$u(x,t) = B_1 e^{\frac{-2m_1^2\pi^2 t}{9}} \sin \frac{m_1\pi}{3} x + B_2 e^{\frac{-2m_2^2\pi^2 t}{9}} \sin \frac{m_2\pi}{3} x \quad (1)$$

Pela última condição de contorno dada,

$$u(x,0) = B_1 \sin \frac{m_1\pi}{3} x + B_2 \sin \frac{m_2\pi}{3} x = 5 \sin 4\pi x - 3 \sin 8\pi x$$

o que é possivel se e somente se

$$B_1 = 5, \; m_1 = 12, \; B_2 = -3, \; m_2 = 24.$$

Levando esses valores em (1), a solução procurada é:

$$u(x,t) = 5e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x - 3e^{-12\pi^2 t} \sin 8\pi x. \square$$

3.5.3 Método de Fourier das variáveis separaveis

Este método consiste em aplicar o método de separação de variáveis conjuntamente com as propriedades das séries de Fourier para determinar a solução de problemas com condições de contornos colocados em domínio limitados.

Série de Fourier

Definição 3.8 (Série de Fourier) *Seja $f(x)$ definida no intervalo $]-L, L[$ e detreminada fora desse intervalo por $f(x+2L) = f(x)$, isto é, suponhamos $f(x)$ periódica de intervalo de periodo $2L$. Defini-se série de Fourier, ou desenvolvimento de Fourier de $f(x)$, como:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \; sen \frac{n\pi x}{L} \right) \qquad (\mathbf{1})$$

onde os coeficientes de Fourier a_n e b_n são:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \; sen \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases} , n = 0, 1, 2, ...$$

Note-se que o termo constante em $(\mathbf{1})$ é igual a

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \, dx,$$

que é a média de $f(x)$ sobre o período.

Série de Fourier de Senos e de Co-senos Uma série de Fourier de senos ou de co-senos é uma série que contém somente termos em senos ou em co-senos, respectivamente.

Quando se deseja uma semi-série correspondente a determinada função, esta é geralmente definida no intervalo$]0, L[$; a função é então especificada como sendo par ou impar, de modo que fique claramente definido seu comportamento na outra metade do intervalo. Essas séries definem-se da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Série seno de Fourier:} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \\ \\ \text{Série co-seno de Fourier:} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \end{cases}$$

Onde os coeficientes a_n e b_n são respectivamente

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{cases}.$$

Exemplo 3.32 *Resolva a equação*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ 0 < x < 3, t > 0,$$

sujeitas as condições

$$u(0,t) = u(3,t) = 0, u(x,0) = f(x),\ \ |u(x,t)| < M.$$

Resolução

Seja $u = XT$, onde X e T são funções de x e t respectivamente.

Então

$$XT' = 2X''T \Leftrightarrow \frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X}$$

Por separação de variáveis. Como cada membro deve ser igual a uma constante, que designamos por $-\lambda^2$.

Então

$$X'' + \lambda^2 X = 0,\ \ T' + 2\lambda^2 T = 0$$

com soluções

$$X = a_1\cos\lambda x + b_1\sin\lambda x,\ T = c_1 e^{-2\lambda^2 t}$$

Uma solução da equação diferencial parcial é, então,

$$u(x,t) = c_1 e^{-2\lambda^2 t}(a_1\cos\lambda x + b_1\sin\lambda x) = e^{-2\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$$

onde $A = c_1 a_1$ e $B = c_1 b_1$.

De $u(0,t) = 0$, $A = 0$. Então

$$u(x,t) = Be^{-2\lambda^2 t}\sin\lambda x$$

De $u(3,t) = 0$, temos $Be^{-2\lambda^2 t}\sin 3\lambda = 0$, de modo que $\sin 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 3\lambda = m\pi \Leftrightarrow \lambda = \frac{m\pi}{3}$, , pois o segundo factor não pode anular-se.

Assim

$$u(x,t) = Be^{\frac{-2m^2\pi^2 t}{9}} \sin \frac{m\pi}{3} x$$

é uma solução.

Para satisfazer à ultima condição $u(x,0) = f(x)$, utilizamos o princípio de superposição para obter

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{\frac{-2m^2\pi^2 t}{9}} \sin \frac{m\pi}{3} x$$

Então de $u(x,0) = f(x)$, vemos que

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi}{3} x$$

e da teoria das séries de Fourier

$$B_m = \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \sin \frac{m\pi}{3} x dx$$

O resultado final é

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \sin \frac{m\pi x}{3} dx \right) e^{\frac{-2m^2\pi^2 t}{9}} \sin \frac{m\pi x}{3} \qquad \square$$

Exemplo 3.33 *Resolve a equação*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; 0 < x < 2, t > 0,$$

sujeitas as condições

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \;\; u_t(x,0) = 0, \;\; u(x,0) = f(x), \;\; |u(x,t)| < M.$$

Resolução

Seja $u = XT$, onde X e T são funções de x e t respectivamente. Substituindo na equação, obtemos:

$$XT'' = 16X''T \Leftrightarrow \frac{T''}{16T} = \frac{X''}{X}$$

Como cada membro deve ser igual a uma constante, que designamos por $-\lambda^2$.

Então

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T'' + 16\lambda^2 T = 0$$

Resolvendo, encontramos

$$X = a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x, \; T = a_2 \cos 4\lambda t + b_2 \sin 4\lambda t$$

Uma solução da equação é

$$u(x,t) = (a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x)(a_2 \cos 4\lambda t + b_2 \sin 4\lambda t) \qquad (1)$$

Para determinar as constantes, é mais fácil aplicar primeiro as condições de contorno que envolvem dois zeros.

De $u(0,t) = 0$, $a_1 = 0$. Então

$$u(x,t) = b_1 \sin \lambda x \,(a_2 \cos 4\lambda t + b_2 \sin 4\lambda t) \qquad (2)$$

De $u_t(0,t) = 0$, $b_2 = 0$. Assim (2) se escreve

$$u(x,t) = B \sin \lambda x \cos 4\lambda t$$

fazendo $b_2 = 0$ e escrevendo $B = b_2 a_2$.

De $u(2,t) = 0$, temos $B \sin 2\lambda \cos 4\lambda t = 0$, de modo que $\sin 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = m\pi \Leftrightarrow \lambda = \frac{m\pi}{2}$, pois o segundo factor não pode anular-se.

Assim

$$u(x,t) = B \sin \frac{m\pi x}{2} \cos 2m\pi t \qquad (3)$$

é uma solução.

Para satisfazer à ultima condição $u(x,0) = f(x)$, utilizamos o princípio de superposição para obter

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{2} \cos 2m\pi t \qquad (4)$$

Então de $u(x,0) = f(x)$, vemos que

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{2}$$

e da teoria das séries de Fourier

$$B_m = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{m\pi x}{2}dx$$

O resultado final será

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_0^2 f(x)\sin\frac{m\pi x}{2}dx\right)\sin\frac{m\pi x}{2}\cos 2m\pi t \qquad \square$$

3.5.4 Método de transformada de Laplace

Transformada $\mathcal{L}$ de Laplace

Nesta seção vamos usar o conceito de operador linear e o seu inverso, na solução de problemas de contorno.

A técnica da Transformada de Laplace é uma poderosa ferramenta na determinação de soluções de equações com derivadas parciais com condições de contorno. O operador $\mathcal{L}$ é um operador linear que destrói derivadas, transformando EDP em simples equações algébricas.

Transformada directa de Laplace

Definição 3.9 (Transformada de Laplace) *Seja $f(t)$ uma função definida para $t > 0$, então, a* ***transformada de Laplace*** *de $f(t)$, denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$, é definida por*

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt,$$

com $s \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.34 $f(t) = 1,\ t \geq 0$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^A = \frac{1}{s},\ \text{para } s > 0$$

Exemplo 3.35 $f(t) = e^{at},\ t \geq 0,\ a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \lim_{A\to\infty} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_0^A = \frac{1}{s-a}, \text{ para } s > 0$$

Definição 3.10 (Função de ordem exponencial) *Dizemos que f é de ordem exponencial em $[0,\infty[$ se existem constantes $C > 0$ e α tais que $|f(t)| < Ce^{\alpha t}$, para qualquer $t > 0$.*

Exemplo 3.36 *$\mathcal{F}(t) = t^2$ é de ordem exponencial 3, pois $|t^2| = t^2 < e^{3t}$, para $t > 0$.*

Exemplo 3.37 *$\mathcal{F}(t) = t^2 \cos at$ é de ordem exponecial pois $|t^2 \cos at| < 2e^{(1+a)t}$.*

Exemplo 3.38 *$e^{t^{\frac{3}{2}}}$ **não** é de ordem exponencial.*

Teorema 3.2 (Condições suficientes para existencia de $\mathcal{L}$) *Se $f(t)$ é continua por partes e de ordem exponencial, então existe um real α tal que $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt$ converge para todos os valores de $s > \alpha$.*

Demonstração

Como f é de ordem exponencial, existem $C > 0$ e α reais tais que

$$|f(t)| < Ce^{\alpha t}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt \right| &\leq C \int_0^\infty e^{-s(-\alpha)t}\ dt \\ &= \lim_{t_0\to\infty} \frac{C}{s-\alpha} \left[1 - e^{-(s-\alpha)t_0}\right] \\ &= \frac{C}{s-\alpha}, \text{ se } s > \alpha. \end{aligned}$$

Assim, a transformada de Laplace existe para $s > \alpha$.

Propriedades da transformadas de Laplace

Teorema 3.3 (Linearidade) *Se c_1, c_2 são constantes quaisquer enquanto $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são funções com transformadas de Laplace $F_1(s)$ e $F_2(s)$ respectivamente, então*

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Demonstração
Sejam

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\, dt \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\, dt$$

Então, se c_1, c_2 são constantes quaisquer,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]\, dt \\
&= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\, dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\, dt \\
&= c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \ \square
\end{aligned}$$

Teorema 3.4 (1^a propriedade de translação na variável t) *Seja a uma constante. Se a transformada de Laplace da função $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ é $F(s)$, para $s > c$, então a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = e^{at} f(t) \quad \text{é} \quad G(s) = F(s-a), \ \text{para } s > a + c.$$

Demonstração
Temos que

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] &= \int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at} f(t)\right] dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt \\
\text{substituindo } s - a &= \omega, \text{ seguirá que} \\
\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] &= \int_0^\infty e^{-\omega t} f(t)\, dt = F(\omega) = F(s-a), \text{ para } s > a + c. \ \square
\end{aligned}$$

Teorema 3.5 (Transformada de Laplace de derivadas)

a) Suponhamos que $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ seja derivavel com $f'(t)$ seccionalmente contínua. Então

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = sF(s) - f(0),$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

Demonstração

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = \lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{-st} f'(t)\, dt$$

Usando o método de integração por partes com $u = e^{-st}$ e $dv = f'(t)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&= \lim_{p\to\infty} \left[e^{-st} f(t)\right]_{0\ p\to\infty}^{p} + s \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \lim_{p\to\infty} \left[e^{-sp} f(p) - f(0) + s \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt\right] \\
&= s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt - f(0) = sF(s) - f(0)
\end{aligned}$$

Sendo que $\lim\limits_{p\to\infty} \left[e^{-sp} f(p)\right] = 0$, pois a função $f(t)$ é de ordem exponencial quando $t \rightarrow \infty$, assim $\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = sF(s) - f(0)$.

b) Suponhamos que $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ seja derivavel duas vezes com $f''(t)$ seccionalmente contínua. Então

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

Demonstração

Da alenea **a)**, vemos que

$$\mathcal{L}\left[g'(t)\right] = s\mathcal{L}\left[g(t)\right] - g(0) = sG(s) - g(0)$$

Fazen do $g(t) = f'(t)$. Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f''(t)\right] &= s\mathcal{L}\left[f'(t)\right] - f'(0) = s\mathcal{L}\left[f(t) - f(0)\right] - f'(0) \\
&= s^2 \mathcal{L}\left[f(t)\right] - sf(0) - f'(0) \\
&= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \ \square
\end{aligned}$$

Métodos para encontrar a transformada de Laplace Há vários métodos disponiveis para determinar transformadas de Laplace, dos quais utilizaremos, os abaixos indicados:

Método directo Este método envolve o uso directo da definição (1).

Uso de tabela Ver tabela 2 em **Anexo .**

Transformada Inversa de Laplace

Definição 3.11 (Transformada inversa) *Se a transformada de Laplace de uma função* $f(t)$ *é* $F(s)$*, isto é, se* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ *então* $f(t)$ *é chamada* ***transformada inversa de Laplace*** *de* $F(s)$ *e escrevemos simbolicamente* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Exemplo 3.39 *Como* $\mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}$*, podemos escrever* $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = e^{-3t}$.

Propriedades da transformadas inversas de Laplace

Teorema 3.6 (Linearidade) *Se* c_1, c_2 *são constantes quaiquer enquanto,* $F_1(s)$ *e* $F_2(s)$ *são as transformadas de Laplace* $f_1(t)$ *e* $f_2(t)$ *respectivamente, então*

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1F_1(s) + c_2F_2(s)] = c_1\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + c_2\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = c_1f_1(t) + c_2f_2(t).$$

Demonstração
Sejam

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = f_1(t) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = f_2(t)$$

Então, se c_1, c_2 são constantes quaisquer

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1F_1(s) + c_2F_2(s)] = c_1\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + c_2\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = c_1f_1(t) + c_2f_2(t) \ \square.$$

Teorema 3.7 (1^a propriedade de translação) *Se* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$*, então* $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t)$.

Demonstração
Temos que

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right] = F(s-a)$$

Então

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-a)\right] = e^{at}f(t) \quad \square.$$

Teorema 3.8 (Teorema de convolução) *Se* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ *e* $\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$, *então* $\mathcal{L}^{-1}[F(s).G(s)] = \int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du = f * g$.

Métodos para encontrar transformadas inversas de Laplace Vários meios são disponiveis para determinar transformadas inversas de Laplace, dos quais utilizaremos os abaixos indicados:

Métodos das fracções parciais O método das fracções parciais é usada para decompor funções racionais em formas mais simples, normalmente objectivando processos mais simples de integração ou obtenção de transformadas inversas de Laplace. Visto que encontrando a transformada inversa de Laplace de cada uma das fracções podemos encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]$.

Exemplo 3.40 *Para decompor a função racional* $F(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3}$, *em fracção parcial, escrevemos*

$$F(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$$

Multiplicando por $(s-3)(s+1)$, podemos obter

$$3s+7 = (A+B)s + A - 3B$$

Igualando os coeficientes $3 = A+B$ e $A-3B = 7$; então $A = 4$ e $B = -1$,
Logo

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{4}{s-3} - \frac{1}{s+1} \qquad \square$$

Uso de tabela Ver tabela 3 em **Anexo .**

Solução de problemas de valor no contorno por transformadas de Laplace O uso deste método (em relação a t ou x) num problema de valor no contorno, a EDP pode ser transformada numa equação diferencial ordinária.

A solução procurada pode ser então obtida resolvendo essa equação e invertendo a solução com o uso da transformada inversa de Laplace.

Teorema 3.9 *A solução geral de uma equação com derivadas parciais linear não homogénea se obtém como soma da solução geral da equação homogénea associada com uma solução particular da equação não homogénea.*[4]

Exemplo 3.41 *Encontre a solução de* $\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial t} + u,\ u(x,0) = 6e^{-3x}$, *que seja limitada para* $x > 0, t > 0$.

Resolução

Tomando a transformada de Laplace da equação dada, em relação a t, encontramos

$$\frac{dU}{dx} = 2\left(sU - u(x,0)\right) + u \Leftrightarrow \frac{dU}{dx} - (2s+1)U = -12e^{-3x} \qquad (1)$$

da condição de contorno dada. Notemos que a transformada de Laplace transformou a equação numa equação diferencial ordenária (1). Para resolver (1), multiplicando ambos os lados pelo factor de integração

$$e^{\int -(2s+1)dx} = e^{-(2s+1)x}$$

Então, (1) pode ser escrita

$$\frac{dU}{dx}\left(Ue^{-(2s+1)x}\right) = -12e^{-(2s+4)x}$$

Integração produz

$$Ue^{-(2s+1)x} = \frac{6}{s+2}e^{-(2s+4)x} + c \Leftrightarrow U = \frac{6}{s+2}e^{-3x} + ce^{(2s+1)x}$$

[4] Utilizaremos o conhecimento deste teorema para resolver as equações com derivadas parciais de segunda ordem.

Agora, como $U_x(x,t)$ deve ser limitada quando $x \to \infty$, devemos ter também limitada $U(x,s)$ quando $x \to \infty$ e segue que devemos escolher $c = 0$. Então

$$U = \frac{6}{s+2} e^{-3x}$$

Logo, tomando a transformada inversa de Laplace, vem

$$u(x,t) = 6e^{-2t-3x}. \quad \square$$

Exemplo 3.42 *Resolve a seguinte equação*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sujeitas as condições

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \; u(x,0) = 20\sin 2\pi x$$

Resolução

Tomando a transformada de Laplace em ordem a t, vem que

$$s^2U - su(x,0) - u_t(x,0) = 9\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Leftrightarrow 9\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2U = -20s\cos 2\pi x \quad (1)$$

A solução geral de (1) é

$$U(x,s) = U_h + U_p$$

onde U_p é uma solução particular da equação (1) e U_h a solução geral da homogênia associada.

A homogénea associada é

$$9\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2U = 0$$

e a solução geral é

$$U_h = c_1 e^{-\frac{sx}{3}} + c_2 e^{\frac{sx}{3}},$$

vamos agora procurar uma solução particular da equação dada, que tera a forma

$$U_p = m\sin 2\pi x.$$

Vamos substituir esta função na equação e determinar m e n para que se tenha uma identidade:

$$9\frac{\partial^2}{\partial x^2}(m\sin 2\pi x) - s^2(m\sin 2\pi x) = -20s\cos 2\pi x$$

ou

$$\left(s^2 + 36\pi^2\right) m\sin 2\pi x = 20s\cos 2\pi x$$

Devemos ter então

$$\left(s^2 + 36\pi^2\right) m = 20s \Leftrightarrow m = \frac{20s}{s^2 + 36\pi^2}$$

De modo que $U_p = \frac{20s}{s^2+36\pi^2}\sin 2\pi x$ é uma solução particular da equação. Então a solução geral será

$$U(x,s) = c_1 e^{-\frac{sx}{3}} + c_2 e^{\frac{sx}{3}} + \frac{20s}{s^2 + 36\pi^2}\sin 2\pi x \qquad (2)$$

Tomando a transformada de Laplace das condições de contorno que envolvem t, temos

$$\mathcal{L}\{u(0,t)\} = U(0,s), \mathcal{L}\{u(2,t)\} = U(2,s) \qquad (3)$$

Usando a primeira condição $[U(0,s) = 0]$ de (3) em (2), temos

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad (4)$$

Usando a segunad condição $[U(2,s) = 0]$ de (3) em (2), temos

$$c_1 e^{-\frac{2s}{3}} + e^{\frac{2s}{3}} c_2 = 0 \qquad (5)$$

De (4) e (5), encontramos $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, logo, (2) se torna

$$U(x,s) = \frac{20s}{s^2 + 36\pi^2}\sin 2\pi x \qquad (6)$$

De onde obtemos, invertendo, utilizando a transformada inversa de Laplace

$$u(x,t) = 20\sin 2\pi x\cos 6\pi t. \ \square$$

CAPÍTULO 4

Algumas aplicações

4.1 Introdução

As equações com derivadas parciais surgem em quase todos os ramos da Física e Engenharia, quer no ambito dos fundamentos teóricos, quer como tradução matemática de um determinado fenómenos. Nesta secção vamos ver alguns exemplos do aparecimento de EDP referindo-nos, em especial, àquelas que primeiro apareceram, com o nascer a teoria das equações com derivadas parciais. Normalmente recorremos as condições de fronteira ou contorno para procurar as soluções de tais equações.

4.2 Algumas equações notáveis

4.2.1 Equação da difusão

Designamos por $u(x, y, z, t)$ a temperatura no ponto $P(x, y, z)$ de um sólido no instante **t**. Seja **S** uma superfície orientado passando por esse ponto. A quantidade de calor que, por condução, atravessa S por unidade de área e de tempo no ponto considerado é:

$$q(x, y, z, t) = -k\frac{d}{dn}u(x, y, z, t) \qquad (1)$$

onde $k(x, y, z, t)$ é a condutibilidade térmica da substância do corpo e $\frac{d}{dn}$ significa derivada na direcção e sentido da normal em S no ponto considerado.

Se a temperatura é função apenas de x e $t - u(x,t) -$ então o fluxo do calor na direcção e sentido do eixo dos xx será:

$$q(x,t) = -k\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \qquad (2)$$

Consideremos neste caso um prisma do sólido com as faces laterais paralelas ao eixo dos xx como indica a figura.

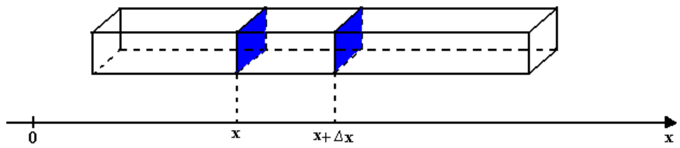

Fig.1

Como há variação de temperatura apenas na direcção do eixo das abcissas, no elemento do prisma correspondente a x e $x + \Delta x$ apenas há trocas de calor através das bases e a quantidade de calor recebido por unidade de tempo é, de acordo com (2)

$$-Ak(x,t)\,u_x^{'}(x,t) + Ak(x+\Delta x,t)\,u_x^{'}(x+\Delta x,t)\,,$$

onde **A** designa a área da secção recta do prisma. Estamos a supor que no elemento considerado não há qualquer fonte de calor nem este se perde.

Por outro lado, se for **c** o calor específico do sólido e $\boldsymbol{\rho}$ e a sua densidade, a quantidaee de calor que o elemento do prisma recebe na unidade de tempo é também

$$c\rho A\Delta x u_t^{'}(x,t)$$

Escrever-se á, pois

$$c\rho A\Delta x u_t^{'}(x,t) = A\left[k(x+\Delta x,t)\,u_x^{'}(x+\Delta x,t) - k(x,t)\,u_x^{'}(x,t)\right];$$

e dividindo ambos os membros por $A\Delta x$ e fazendo tender Δx para zero, obtém-se

$$c\rho u_t^{'}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\,u_x^{'}(x,t)\right]$$

Se k não depender de x, esta equação toma a forma de:

$$u_t^{'}(x,t) = ku_{xx}^{''}(x,t)\,, \quad k = \frac{K}{c\rho} \qquad (3)$$

e recebe o nome de equação da difusão ou do calor no caso unidimensional.
A equação correspondente no caso bidimensional terá a forma:

$$u_t^{'} = k\left(u_{xx}^{''} + u_{yy}^{''}\right) \qquad (4)$$

4.2.2 Equação de Laplace

Se na equação (**4**) a função u for independente do tempo(estado estacionario), ela escreve-se

$$u_{xx}^{''} + u_{yy}^{''} = 0 \qquad (5)$$

forma bidimencional da chamada equação de Laplace.

Usam-se também os operadores Lap ou ∇^2 para representar o primeiro membro, escrevendo-se $Lap\ u = 0$ ou $\nabla^2 u = 0$.

4.2.3 Equação da onda

Consideremos uma corda perfeitamente flexível, homogénea e seja ρ a sua massa por unidade de comprimento. Supomos que a corda na sua posição de equilíbrio está colocada segundo o eixo dos xx e designemos por por $u(x,t)$ a ordenada, no instante t, do ponto $P(x,u)$, tal como está figurado.

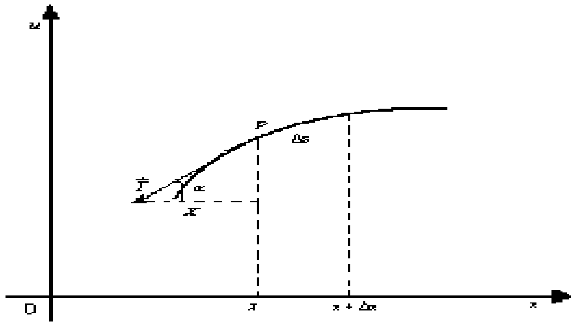

Fig. 2

Seja T a tensão em cada um dos pontos da corda e supomos que o módulo da projecção da força de tensão sobre o eixo dos xx é constante e igual a X; desprezemos o peso da corda e supomos ainda que o ângulo α da figura é suficientemente pequeno para se poder substituir o comprimento Δs de um elemento da corda pelo valor Δx da sua projecção no eixo das abcissas; e determinemos a componente, segundo o eixo dos uu, da força de tensão que a parte da corda à esquerda de P exerce nesse ponto.

Se for U o valor dessa componente, tem-se á $\tan\alpha = -\frac{U}{X}$, donde $U = -Xu_x^{'}(x,t)$

A massa do elemento Δs será , aproximadamente $\rho\Delta x$; se Δs é suficientemente pequeno, tem-se, também aproximadamente

$$\rho\Delta s u_{tt}^{''}(x,t) = -Xu_x^{'}(x,t) + Xu_x^{'}(x+\Delta x,t)$$

e, por conseguinte

$$u_{tt}^{''}(x,t) = \frac{X}{\rho}.\frac{u_x^{'}(x+\Delta x,t) - u_x^{'}(x,t)}{\Delta x}$$

Fazendo tender Δx para zero obtém-se a equação

$$u_{tt}^{''}(x,t) = c^2 u_{xx}^{''}(x,t)\,, \quad c^2 = \frac{X}{\rho}, \qquad (1)\,,$$

normalmente conhecida por equações das ondas ou das cordas vibrantes no caso unidimensional.

4.3 Exercícios resolvidos

(**Equações notáveis**)[1]

Equação da Difusão

Exercício 4.1 *Resolva a equação* $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, *utilizando o método :*

a) Separação de variáveis sujeitas as condições:

$$u(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0,\ u(x,0) = 3\sin 2\pi x, |u(x,t)| < M.$$

Resolução
Fazendo $u = XT$ na equação e separando as variáveis, encontramos

$$XT' = kX''T \quad \text{ou} \quad \frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X}$$

Igualando cada membro á constante $-\lambda^2$(se tomassemos $+\lambda^2$, a solução resultante não satisfaria à condição de u ser limitada para valores reais de λ), obtemos

$$T' + k\lambda^2 T = 0;\ X'' + \lambda^2 X = 0$$

de forma que

$$X = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x;\ T = ce^{-\lambda^2 kt}$$

uma solução é assim dada por

$$u(x,t) = e^{-\lambda^2 kt}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x), \quad A = ac,\ B = bc$$

De $u(0,t) = 0$, vimos que $A = 0$, de modo que

$$u(x,t) = Be^{-\lambda^2 kt}\sin\lambda x$$

De $u(L,t) = 0$, vimos que $\lambda L = m\pi$, $m = 1, 2, 3, ...$, i.e., $\lambda = \frac{m\pi}{L}$

[1] Spiegel, Análise de Fourier, 1976, pág. 20- 62;
Spiegel, Transformada de Laplace, 1976, pág. 127- 143;

Assim

$$u(x,t) = Be^{-\frac{m^2\pi^2}{L^2}kt}\sin\frac{m\pi x}{L}$$

De $u(x,0) = 0$, vemos que

$$B\sin\frac{m\pi x}{L} = 3\sin 2\pi x$$

Onde só é possível sse $B = 3$ e $m = 2L$

Então

$$u(x,t) = 3e^{-4\pi^2 kt}\sin 2\pi x \ \square$$

b) Fourier de variáveis separaveis sujeitas as condições:

$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0,\ u(x,0) = f(x)\,,\ \ |u(x,t)| < M\ .$$

Resolução

Fazendo $u = XT$ na equação e separando as variáveis, encontramos

$$XT' = kX''T \ \text{ ou } \ \frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X}$$

Igualando cada membro á constante $-\lambda^2$, obtemos

$$T' + k\lambda^2 T = 0;\ X'' + \lambda^2 X = 0$$

de forma que

$$X = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x;\ T = ce^{-\lambda^2 t}$$

uma solução é assim dada por

$$u(x,t) = e^{-\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)\,,\quad A = ac,\ B = bc$$

De $\varphi_x(0,t) = 0$, temos que $B = 0$, de modo que

$$u(x,t) = Ae^{-\lambda^2 t}\cos\lambda x$$

Então, de $\varphi_x(L,t) = 0$, temos que $\lambda = \frac{m\pi}{L}$, $\ m = 0, 1, 2, ...$

Assim

$$u(x,t) = Ae^{\frac{-km^2\pi^2 t}{L^2}}\cos\frac{m\pi x}{L}, m = 0, 1, 2, ..$$

Para sasisfazer à última condição, $\varphi(x,0) = f(x)$, utilizamos o princípio da superposição para obter

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{\frac{-km^2\pi^2 t}{L^2}} \cos\frac{m\pi x}{L}$$

Então, de $\varphi(x,0) = f(x)$, vemos que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\frac{m\pi x}{L}$$

Assim da série de Fourier, encontramos

$$A_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx$$

Então a solução será

$$u(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{m=1}^{\infty}\left(e^{\frac{-km^2\pi^2 t}{L^2}}\cos\frac{m\pi x}{L}\right)\int_0^L f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx \quad \square$$

c) Transformada de Laplace sujeitas as condições:

$$u(x,0) = 0,\ u(0,t) = G(t),\ \ |u(x,t)| < M,\ x < 0,\ t > 0$$

Resolução

Tomando a transformada de Laplace, encontramos

$$sU - u(x,0) = k\frac{d^2U}{dx^2} \text{ ou } \frac{d^2U}{dx^2} - \frac{s}{k}U = 0 \quad (1)$$

onde

$$U(0,s) = \mathcal{L}[u(0,t)] = g(s) \quad (2)$$

e $U = U(x,s)$ é exigido que seja limitada.

Resolvendo (**1**) encontramos

$$U(x,s) = c_1 e^{\sqrt{\frac{s}{k}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}$$

Então, escolhemos $c_1 = 0$, de modo que u seja limitada quando $x \to \infty$, e temos

$$U(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}$$

De (**2**) temos $c_2 = g(s)$, logo

$$U(x,s) = g(s)\, e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}$$

Como

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}\right] = \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

Portanto, pelo teorema da convolução

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4ku}} G(t-u)\, du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-v^2} G\left(t - \frac{x^2}{4kv^2}\right) dv, \end{aligned}$$

fazendo $v = \frac{x^2}{4ku}$. $\square$

Equação de Laplace

Exercício 4.2 *Considere a seguinte equação* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

a) Use o método de separação de variáveis para mostrar que a solução da equação é

$$u(x,y) = 8\cos 3\pi x \sinh 3\pi y - 4\cos\frac{\pi}{7} y \sinh\frac{\pi}{7} y,$$

sujeitas as condições:

$$\begin{aligned} u_x(0,y) &= u(1,y) = u(x,0) = 0, \\ u(0,y) &= 8\sinh 3\pi y - 4\sinh\frac{\pi y}{7}. \end{aligned}$$

Resolução

Fazendo $u = XY$, na equação e separando as variáveis, obtemos

$$X''Y + XY'' \text{ ou } \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$

Igualando cada membro a $-\lambda^2$, vem

$$X'' + \lambda^2 X = 0,\ Y'' - \lambda^2 Y = 0$$

donde

$$X = a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x,\ Y = a_2 \cos h\lambda y + b_2 \sinh \lambda y$$

Então, uma possível solução é

$$u(x,t) = (a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x)(a_2 \cos h\lambda y + b_2 \sinh \lambda y)$$

De $u_x(0,y) = 0$, obtemos $b_1 = 0$. De $u(x,0) = 0$, obtemos $a_2 = 0$. De $u(1,y) = 0$, obtemos $\lambda = \frac{(2n-1)\pi}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Assim, uma solução é

$$u(x,t) = B \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} x \sinh \frac{(2n-1)\pi}{2} y$$

Outrossim, pelo princípio de superposição

$$\begin{aligned} u(x,t) &= B_1 \cos \frac{(2n_1-1)\pi x}{2} \sinh \frac{(2n_1-1)\pi y}{2} + B_2 \cos \frac{(2n_2-1)\pi x}{2} . \\ &\quad . \sinh \frac{(2n_2-1)\pi y}{2} \end{aligned}$$

De $u(0,y) = 8 \sinh 3\pi y - 4 \sinh \frac{\pi y}{7}$, obtemos

$$u(x,t) = B_1 \sinh \frac{(2n_1-1)\pi y}{2} + B_2 \sinh \frac{(2n_2-1)\pi y}{2} = 8 \sinh 3\pi y - 4 \sinh \frac{\pi y}{7}$$

Isto é possível sse $B_1 = 8,\ n_1 = \frac{7}{2},\ B_2 = -4$ e $n_2 = \frac{9}{14}$

Assim, a solução procurada é

$$u(x,t) = 8 \cos 3\pi x \sinh 3\pi y - 4 \cos \frac{\pi}{7} x \sinh \frac{\pi}{7} y. \ \square$$

b) Use o método de Fourier de variáveis separaveis, sujeitas as condições:

$$u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0, u(x,1) = u_1 \text{ e } |u(x,t)| < M,$$

para mostrar que a solução da equação dada é:

$$u(x,y) = \frac{2u_1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \cos m\pi}{m \sinh m\pi} \sin m\pi x$$

Resolução
Fazendo $u = XY$, na equação e separando as variáveis, obtemos

$$X^{''}Y + XY^{''} \text{ ou } \frac{X^{''}}{X} = -\frac{Y^{''}}{Y}$$

Igualando cada membro a $-\lambda^2$, vem

$$X^{''} + \lambda^2 X = 0, \; Y^{''} - \lambda^2 Y = 0$$

donde

$$X = a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x, \; Y = a_2 \cos h\lambda y + b_2 \sinh \lambda y$$

Então, uma possível solução é

$$u(x,t) = (a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x)(a_2 \cos h\lambda y + b_2 \sinh \lambda y)$$

De $u(0,y) = 0$, obtemos $a_1 = 0$. De $u(x,0) = 0$, obtemos $a_2 = 0$. De $u(1,y) = 0$, obtemos $\lambda = m\pi$, $m = 1, 2, 3, ...$ Assim, uma solução que satisfaz a todas essas condições é

$$u(x,t) = B \sin m\pi x \sinh m\pi y$$

Para satisfazer à última condição, $u(x,1) = u_1$, devemos primeiro utilizar o princípio de superposição para obter a solução

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin m\pi x \sinh m\pi y. \qquad (2)$$

Então, de $u(x,1) = u_1$, devemos ter

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} (B_m \sinh m\pi) \sin m\pi x$$

Aplicando então a teoria das séries de Fourier

$$B_m \sin m\pi = 2 \int_0^1 u_1 \sin m\pi x dx = \frac{2u_1(1 - \cos m\pi)}{m\pi}$$

donde

$$B_m = \frac{2u_1(1 - \cos m\pi)}{m\pi \sinh m\pi} \qquad (\mathbf{3})$$

De (**2**) e (**3**), obtemos

$$u(x,y) = \frac{2u_1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2u_1(1-\cos m\pi)}{m\pi \sinh m\pi} \sin m\pi x \sin m\pi y. \quad \square$$

c) Use a transformada de Laplace, para mostrar que a solução da equação é

$$u(x,t) = 3\cos 4\pi x \cosh 4\pi t,$$

onde as condições de contorno são:

$$u_t(x,0) = u\left(\frac{1}{8}, t\right) = u_x(0,t) = 0, \quad u(x,0) = 3\cos 4\pi x.$$

Resolução

Tomando a transformada de Laplace em ordem a t, vemos que

$$\frac{d^2U}{dx^2} + s^2U - s\varphi(x,0) - \varphi_t(x,0) = 0 \quad \text{i.é} \quad .\frac{d^2U}{dx^2} + s^2U = 3s\cos 4\pi x \qquad (1)$$

A solução geral de (1), é

$$U = c_1 e^{-isx} + c_2 e^{isx} + \frac{3s}{s^2 - 16\pi^2}\cos 4\pi x \qquad (2)$$

Tomando a transformada de Lalace das condições de contorno que envolvem t, temos

$$\mathcal{L}\left[u\left(\frac{1}{8}, t\right)\right] = U\left(\frac{1}{8}, s\right) = 0 \text{ e } \mathcal{L}[u_x(0,t)] = U_x(0,s) = 0 \qquad (3)$$

Usando a primeira condição de (3) em (2) temos

$$c_1 e^{-\frac{is}{8}} + c_2 e^{\frac{is}{8}} = 0 \qquad (4)$$

Usando a segunda condição de (3) em (2) temos

$$-isc_1 + isc_2 = 0 \qquad (5)$$

De (4) e (5) encontramos $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$, logo (2) se torna

$$U = \frac{3s}{s^2 - 16\pi^2}\cos 4\pi x$$

De onde obtemos invertendo, usando a transformada inversa de Laplace

$$u(x,t) = 3\cos 4\pi x \cosh 4\pi t. \quad \square$$

Equação da Onda

Exercício 4.3 *Resolve a equação* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, *utilizando o método:*

a) Separação de variáveis sujeitas as condições:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,\ \ u(x,0) = 6\sin 7\pi x,\ \ \varphi_t(x,0) = 0,\ \ |u(x,t)| < M$$

Resolução

Fazendo $u = XT$ na equação e separando as variáveis, encontramos

$$XT'' = a^2 X'' T \quad \text{ou} \quad \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$$

Igualando cada membro à constante $-\lambda^2$, obtemos

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0, \qquad X'' + \lambda^2 X = 0$$

de forma que

$$X = a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x, \quad T = a_2 \cos \lambda a t + b_2 \sin \lambda a t$$

Uma solução é assim dada por

$$u(x,t) = (a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x)(a_2 \cos \lambda a t + b_2 \sin \lambda a t) \qquad (1)$$

De $u(0,t) = 0$, vemos que $a_1 = 0$.

Assim (1) fica

$$u(x,t) = b_1 \sin \lambda x (a_2 \cos \lambda a t + b_2 \sin \lambda a t) \qquad (2)$$

De $u_t(x,0) = 0$, vemos que $b_2 = 0$. Assim (2) se escreve

$$u(x,t) = B \sin \lambda x \cos \lambda a t, \text{ onde } B = b_1 a_2$$

De $u(L,t) = 0$, temos que $\sin L\lambda = 0$, ié, $\lambda = \frac{m\pi}{L}$, onde $m = 0, \pm 1, ...$

Assim

$$u(x,t) = B \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi a t}{L}.$$

De $u(x,0) = 6\sin 7\pi x$, vemos que

$$B\sin\frac{m\pi x}{L} = 6\sin 7\pi x$$

isto é possivel sse $B = 6$ e $m = 7L$. assim, a solução procurada é

$$u(x,t) = 6\sin 7\pi x\cos 7\pi at. \quad \square$$

b) Fourier de variáveis separaveis, sujeitas as condições:

$$u(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ u_t(x,0),\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L,\ t > 0$$

Resolução
Fazendo $u = XT$ na equação e separando as variáveis, encontramos

$$XT'' = a^2X''T \ \text{ i.é } \ \frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}$$

Igualando cada membro à constante $-\lambda^2$, obtemos

$$T'' + \lambda^2a^2T = 0, \quad X'' + \lambda^2X = 0$$

de forma que

$$X = a_1\cos\lambda x + b_1\sin\lambda x, \quad T = a_2\cos\lambda at + b_2\sin\lambda at$$

Uma solução é assim dada por

$$u(x,t) = (a_1\cos\lambda x + b_1\sin\lambda x)(a_2\cos\lambda at + b_2\sin\lambda at) \qquad (1)$$

De $u(0,t) = 0$, vemos que $a_1 = 0$.
Assim (1) fica

$$u(x,t) = b_1\sin\lambda x(a_2\cos\lambda at + b_2\sin\lambda at) \qquad (2)$$

De $u_t(x,0) = 0$, vemos que $b_2 = 0$. Assim (2) se escreve

$$u(x,t) = A\sin\lambda x\cos\lambda at, \text{ onde } A = b_1a_2$$

De $u_x(L,t) = 0$, vemos que $\cos L\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda L = n\pi - \frac{\pi}{2}$, ié,$\lambda = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$, onde $n = 1, 2, 3, ..$

Assim

$$u(x,t) = A\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2L}$$

Para satisfazer a ultima condição $\varphi(x,0) = f(x)$, utilizamos o princípio da superposição para obter

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2L} \qquad (3)$$

Então, de $\varphi(x,0) = f(x)$, vemos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$$

Assim da série de Fourier, encontramos

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}dx$$

Então

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^L f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}dx\right]\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2L}. \ \square$$

c) Transformada de Laplace, sujeitas as condições:

$$u_x(0,t) = u\left(\frac{1}{2},t\right) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 12\cos\pi x + 16\cos 3\pi x.$$

Resolução

Tomando a Transformada de Laplace em ordem a t, vemos que

$$s^2U - s\varphi(x,0) - \varphi_t(x,0) = a^2\frac{d^2U}{dx^2} \quad \text{i.é } .a^2\frac{d^2U}{dx^2} - s^2U = -12\cos\pi x - 16\cos 3\pi x \qquad (1)$$

A solução geral de (1), é

$$U = c_1e^{-\frac{sx}{a}} + c_2e^{\frac{sx}{a}} + \frac{12}{s^2+a^2\pi^2}\cos\pi x + \frac{16}{s^2+9a^2\pi^2}\cos 3\pi x \qquad (2)$$

Tomando a transformada de Lalace das condições de contórno que envolvem t, temos:

$$\mathcal{L}\left[u_x\left(0,t\right)\right] = U_x\left(0,s\right) = 0 \text{ e } \mathcal{L}\left[u\left(\frac{1}{2},t\right)\right] = U\left(\frac{1}{2},s\right) = 0 \qquad (3)$$

Usando a primeira condição de (3) em (2) temos

$$-\frac{s}{a}c_1 + \frac{s}{a}c_2 = 0 \qquad (4)$$

Usando a segunda condição de (3) em (2) temos

$$c_1 e^{-\frac{s}{2a}} + c_2 e^{\frac{s}{2a}} = 0 \qquad (5)$$

De (4) e (5) encontramos $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$, logo (2) se torna

$$U = \frac{12}{s^2 + a^2\pi^2}\cos \pi x + \frac{16}{s^2 + 9a^2\pi^2}\cos 3\pi x$$

De onde obtemos invertendo

$$u\left(x,t\right) = \frac{12}{a\pi}\cos \pi x \sin a\pi t + \frac{16}{3a\pi}\cos 3\pi x \sin 3a\pi t. \quad \square$$

CAPÍTULO 5

Conclusão

Apesar de algumas dificuldades e alguns momentos de desânimo, motivado pela pressão e problemas que ocasionalmente teimavam em aparecer, a realização desta investigação foi-nos extremamente útil e decisiva nesta etapa de formação.

Este trabalho proporcionou-nos o enriquecimento do nosso conhecimento sobre equações com derivadas parciais e suas aplicações. Aliás as equações com derivadas parciais não foi um tema tratado formalmente no curso, donde o nosso grande interesse em enriquicer a nossa formação com este tema, que se revelou integrador de várias áreas de conhecimento adquiridos no curso.

Ao longo da feitura do trabalho fomos-nos apercebendo da complexidade de alguns resultados, sobretudo da sua beleza e interesse.

Sendo este trabalho de natureza matemática, acabamos por revelar apenas a ponta de iceberg do assunto sobre equações com derivadas parciais, por isso, numa outra ocasião o formando gostaria de alargar o trabalho estudando de uma forma detalhada os fundamentos das EDP.

Esperamos ter alcançado os objectivos proposto, despertando interesse para o estudo desse tema. Ainda, esperamos que este trabalho venha a servir como um importante instrumento de pesquisa para todos queles que queiram aprofundar os seus conhecimentos sobre as equações com derivadas parciais e sirva de auxílio para todos aqueles que venha a leccionar essa matéria.

* * *

Finalmente resta-nos referir que o presente projecto representou para nós mais uma grande oportunidade de formação, para que possamos mais e melhor constribuir como profissionais para o desenvolvimento de sistema educativo.

CAPÍTULO 6

Bibliografia

[**1**] Agudo,F.R Dias.**Análise Real,** Vol III. Escolar Editora. LX.

[**2**] Esgoltz, L. **Ecuaciones às Derivadas Parciales.** Mir Moscovo.1980.

[**3**] Gájov, F.D. **Problemas de Contorno.** Mir Moscovo.1980.

[**4**] Guidorizzi, Hamilton Luiz.**Um Curso de Cálculo**. VolII. livros técnicos e científicos Ltda. 1986.

[**5**] Mijáilov, F.D. **Ecuaciones Deferenciales en Derivadas Parciales.** Mir Moscovo. 1978.

[**6**] Spiegel, Murray.R. **Análise de Fourier.** Coleção Schaun. São Paulo. Mc Graw Hill do Brasil. 1976.

[**7**] Spiegel, Murray.R. **Equações Diferenciais.** Coleção Schaun. São Paulo. Mc Graw Hill do Brasil. 1974.

[**8**] Spiegel, Murray.R. **Transformada de Laplace.** Coleção Schaun. São Paulo. Mc Graw Hill do Brasil. 1976.

[**9**] Zill, Denis G. and Culler. Micheal R. **Equacões Diferenciais,** 3a. edition**.** São Paulo. Markon Books. 2001

CAPÍTULO 7

Anexo

Tabela 1

Tabela com algumas das Equações Diferenciais Ordinárias e respectivas soluções gerais

Equação	Solução Geral
$y^{'} - ky$	$y(t) = Pe^{kt}$
$y^{"} - \lambda^2 y = 0$	$y(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$
$y^{"} + \lambda^2 y = 0$	$y(x) = A\cosh(\lambda x) + B\sinh(\lambda x)$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; A, B \text{ e } P \text{ constantes}$$

Tabela 2

Tabela de Transformada de Laplace

	$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
1	1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
2	t	$\frac{1}{s^2},\ s > 0$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$
4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
5	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, s > 0$
6	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$
7	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, s > \lvert a \rvert$
8	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, s > \lvert a \rvert$

Tabela 3

Tabela de Transformada Inversas de Laplace

	$F(s)$	$L^{-1}\left[F(s)\right]=f(t)$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^{n+1}}, n=0,1,2,..$	$\frac{t^n}{n!}$
4	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
6	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
7	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
8	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$